



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA DELL'INFORMAZIONE
Corso di Laurea in Ingegneria dell'Informazione

TESI DI LAUREA TRIENNALE

Controllo di un robot autobilanciato

Candidato:

Alessandro Traspadini

Matricola 1137855

Relatore:

Ch.mo Prof. Mauro Bisiacco

Indice

1	Introduzione	1
2	Modello fisico	3
2.1	Analisi della parte inferiore	3
2.2	Analisi della parte superiore	5
2.3	Analisi del motore elettrico	7
2.4	Linearizzazione e modello di stato	8
2.5	Funzione di trasferimento	11
2.6	Parametri e specifiche	13
3	Progetto del controllore	15
3.1	Controllore $C_1(s)$	15
3.2	Funzione di trasferimento del sistema retroazionato	18
3.3	Controllore $C_2(s)$	21
3.4	Modello Simulink e simulazioni	28
3.4.1	Simulazioni con condizioni iniziali non nulle	33
4	Analisi del sistema non-lineare	35
4.1	Analisi dei punti di equilibrio	37
4.2	Simulazioni del sistema con Simulink	41
4.2.1	Simulazioni con condizioni iniziali non nulle	43
5	Conclusioni	47

Capitolo 1

Introduzione

Lo scopo di questo elaborato è la progettazione del controllo di un robot autobilanciato, ossia di un dispositivo su due ruote in grado di mantenere la posizione di equilibrio ed avanzare fino ad una certa coordinata spaziale definita, nonostante i disturbi esterni.

Per realizzare ciò sono stati utilizzati due controllori: $C_1(s)$ rende stabile il sistema; $C_2(s)$ gestisce lo spostamento del robot da una posizione iniziale ad una finale, il cui valore corrisponde all'ingresso del sistema.

Per la visualizzazione delle simulazioni degli andamenti del moto del robot si utilizza il programma Simulink.

Un'applicazione tipica simile al sistema di controllo del robot-autobilanciato è il Segway, un dispositivo di trasporto personale.



Figura 1.1: Robot autobilanciato

Capitolo 2

Modello fisico

La struttura di un robot autobilanciato rispecchia un pendolo inverso posizionato su 2 ruote motrici.

La ruota del robot ha un raggio pari ad r ed una massa identificata da m_w . La distanza tra il centro di massa del corpo e la ruota è definita da l , mentre la massa del corpo è determinata da m_b .

Osservando lo schema di figura 2.2 si ottiene una relazione tra la posizione della ruota e la posizione del centro di massa del corpo, la quale può essere riassunta nel seguente sistema:

$$\begin{cases} x_b = x_w + l \sin(\theta_b) \\ y_b = y_w + l \cos(\theta_b) \end{cases}$$

2.1 Analisi della parte inferiore

In primo luogo è necessario analizzare le forze che agiscono sulla ruota: nella seguente tabella sono definite le forze ed i momenti che agiscono nel sistema.

Descrittore	Spiegazione
F_x e F_y	Forze di interazione tra corpo e ruota
F_t	Forza di trazione
$m_w g$	Forza peso della ruota
N	Forza data dalla reazione vincolare con il piano
T_m	Coppia motrice
T_f	Coppia d'attrito

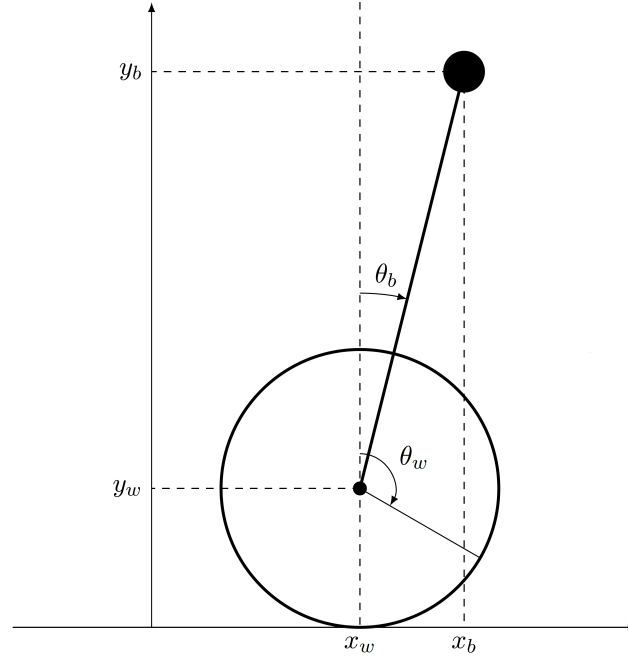


Figura 2.1: Schema del robot autobilanciato

Utilizzando la II legge di Newton e sapendo che la forza risultante verticale è nulla, si ottiene l'equazione:

$$N - m_w g - F_y = 0 \quad (2.1)$$

L'analisi delle forze parallele al piano produce l'equazione:

$$F_t - F_x = m_w \ddot{x}_w \quad (2.2)$$

dove \ddot{x}_w è l'accelerazione del centro di massa della ruota. La forza di trazione F_t è data dall'attrito con il suolo: essendoci un motore che fa girare la ruota, è proprio l'attrito con il suolo che la spinge avanti. L'equazione del moto di rotazione della ruota è:

$$T_m - T_f - rF_t = I_w \ddot{\theta}_w \quad (2.3)$$

Il termine I_w rappresenta il momento d'inerzia della ruota e $\ddot{\theta}$ l'accelerazione angolare. Il moto della ruota si assume essere di puro rotolamento, e quindi:

$$\ddot{x}_w = r \ddot{\theta}_w \quad (2.4)$$

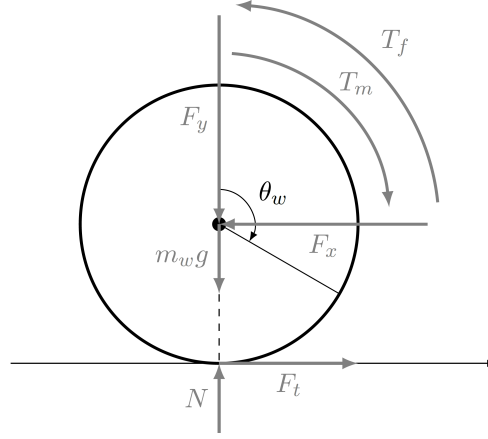


Figura 2.2: Schema delle forze della parte inferiore

Ricavando F_t dalla equazione (2.2), sostituendola in (2.3) e sfruttando (2.4) si ottiene:

$$T_m - T_f - rF_x = \left(rm_w + \frac{I_w}{r} \right) \ddot{x}_w \quad (2.5)$$

2.2 Analisi della parte superiore

Nella parte superiore del robot si ha che l'unica forza che agisce direttamente sul centro di massa del corpo è la forza peso.

Osservando la figura 2.3 si ottengono le equazioni del moto della parte superiore.

L'unica forza parallela al piano è F_x , da cui si ottiene:

$$F_x = m_b \ddot{x}_b \quad (2.6)$$

Dalle forze verticali si ottiene:

$$F_y - m_b g = m_b \ddot{y}_b \quad (2.7)$$

I momenti T_m e T_f sono riferiti alla ruota ed agiscono con verso opposto sul corpo del robot. Le forze F_x e F_y agiscono a distanza l dal centro di massa del corpo.

$$\begin{aligned} T_f - T_m + F_y l \sin(\theta_b) - F_x l \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_b\right) &= I_b \ddot{\theta}_b \\ T_f - T_m + F_y l \sin(\theta_b) - F_x l \cos(\theta_b) &= I_b \ddot{\theta}_b \end{aligned}$$

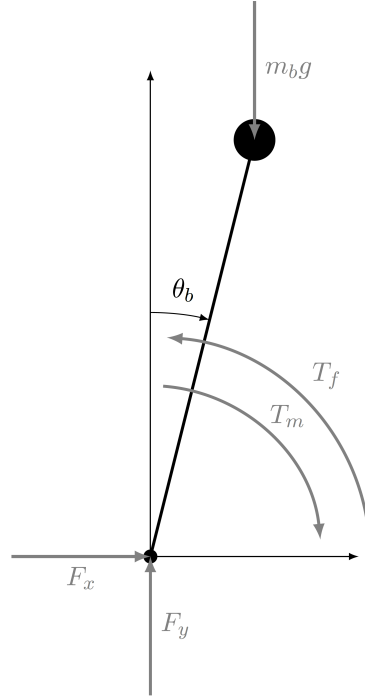


Figura 2.3: Schema delle forze della parte superiore

Il termine I_b rappresenta l'inerzia del corpo. Sostituendo i valori di F_x e F_y ricavati nelle equazioni (2.6) e (2.7) si ottiene:

$$T_f - T_m + (m_b \ddot{y}_b + m_b g) l \sin(\theta_b) - m_b \ddot{x}_b l \cos(\theta_b) = I_b \ddot{\theta}_b \quad (2.8)$$

Dalle relazioni tra posizione del centro di massa della ruota e del corpo si ricavano relazioni addizionali tramite derivazione; ricordando che y_w è costante si ottengono le equazioni:

$$\begin{cases} x_b = x_w + l \sin(\theta_b) \\ \dot{x}_b = \dot{x}_w + \dot{\theta}_b l \cos(\theta_b) \\ \ddot{x}_b = \ddot{x}_w + \ddot{\theta}_b l \cos(\theta_b) - \dot{\theta}_b^2 l \sin(\theta_b) \\ y_b = y_w + l \cos(\theta_b) \\ \dot{y}_b = -\dot{\theta}_b l \sin(\theta_b) \\ \ddot{y}_b = -\ddot{\theta}_b l \sin(\theta_b) - \dot{\theta}_b^2 l \cos(\theta_b) \end{cases} \quad (2.9)$$

Sostituendo \dot{y}_b e \ddot{x}_b nella (2.8) con le relazioni date dalla (2.9) si ottiene:

$$T_f - T_m + m_b g l \sin(\theta_b) - m_b l \ddot{x}_w \cos(\theta_b) = (I_b + m_b l^2) \ddot{\theta}_b \quad (2.10)$$

A questo punto è possibile richiamare l'equazione ottenuta al termine dell'analisi della parte inferiore e sostituire il valore di F_x con quello ricavato dall'analisi della parte superiore (2.6). Utilizzando la terza equazione di (2.9) si ha:

$$T_m - T_f - m_b l r \ddot{\theta}_b \cos(\theta_b) + m_b l r \dot{\theta}_b^2 \sin(\theta_b) = \left(\frac{I_w}{r} + r m_b + r m_w \right) \ddot{x}_w \quad (2.11)$$

La coppia d'attrito è proporzionale alla velocità di rotazione della ruota, si ha quindi:

$$T_f = b_f (\dot{\theta}_w - \dot{\theta}_b) = b_f \left(\frac{\dot{x}_w}{r} - \dot{\theta}_b \right) \quad (2.12)$$

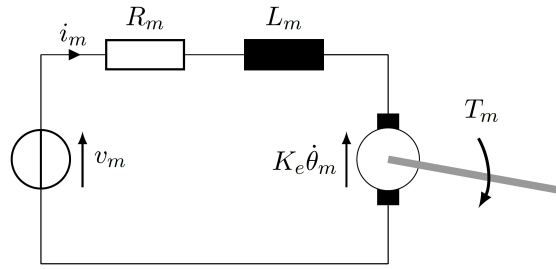


Figura 2.4: Schema del motore elettrico

2.3 Analisi del motore elettrico

I motori elettrici utilizzati possono essere schematizzati come in figura 2.4. Indicando con $v_m(t)$ la tensione applicata alle armature e con $e(t)$ la forza elettromotrice indotta dal motore che agisce in opposizione a v_m si ottiene:

$$v_m(t) - e(t) = R_m i_m(t) + L_m \frac{di_m(t)}{dt} \quad (2.13)$$

In questo caso l'effetto dell'induttanza è trascurabile quindi si assume $L_m \approx 0$ e si ha:

$$i_m(t) = \frac{v_m(t)}{R_m} - \frac{e(t)}{R_m}$$

Il termine $e(t)$, che rappresenta la forza contro-elettromotrice, è proporzionale alla velocità angolare della ruota:

$$e(t) = K_e(\dot{\theta}_w - \dot{\theta}_b) = K_e \left(\frac{\dot{x}_w}{r} - \dot{\theta}_b \right) \quad (2.14)$$

ed utilizzando la relazione fondamentale $T_m(t) = K_t i_m(t)$ si ottiene:

$$T_m(t) = K_t i_m(t) = K_t \frac{v_m(t)}{R_m} - \frac{e(t)}{R_m} = K_t \left(\frac{v_m(t)}{R_m} - \frac{K_e \left(\frac{\dot{x}_w}{r} - \dot{\theta}_b \right)}{R_m} \right) \quad (2.15)$$

Sostituendo dalle equazioni differenziali che descrivono il modello (2.10) e (2.11) le espressioni di T_m e T_f , ricavate rispettivamente in (2.15) e (2.12), si deriva il sistema che descrive il modello fisico.

Per maggior chiarezza si considerano la seguenti sostituzioni:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{b_f R_m + K_t K_e}{R_m r} \\ \beta = I_b + m_b l^2 \\ \gamma = \frac{I_w}{r} + r m_b + r m_w \end{cases}$$

ed infine si ricava:

$$\begin{cases} \alpha \dot{x}_w - \alpha r \dot{\theta}_b - \frac{K_t}{R_m} v_m + m_b g l \text{sen}(\theta_b) - m_b l \ddot{x}_w \cos(\theta_b) = \beta \ddot{\theta}_b \\ \frac{K_t}{R_m} v_m - \alpha \dot{x}_w + \alpha r \dot{\theta}_b - m_b l r \ddot{\theta}_b \cos(\theta_b) + m_b l r \dot{\theta}_b^2 \text{sen}(\theta_b) = \gamma \ddot{x}_w \end{cases} \quad (2.16)$$

2.4 Linearizzazione e modello di stato

A questo punto è necessario linearizzare il sistema in un intorno di uno specifico punto di equilibrio.

Il punto di equilibrio ottimale è $\theta_b = 0$ e, ponendosi in un intorno di tale punto, è possibile approssimare i termini non-lineari tramite sviluppo in serie di McLaurin del primo ordine:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta_b) &\approx \theta_b \\ \cos(\theta_b) &\approx 1 \end{aligned}$$

Il termine $\dot{\theta}_b^2 \approx 0$, quindi l'effetto della forza centripeta è trascurabile.

Mediante queste approssimazioni si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \alpha \dot{x}_w - \alpha r \dot{\theta}_b - \frac{K_t}{R_m} v_m + m_b g l \theta_b - m_b l \ddot{x}_w = \beta \ddot{\theta}_b \\ \frac{K_t}{R_m} v_m - \alpha \dot{x}_w + \alpha r \dot{\theta}_b - m_b l r \ddot{\theta}_b = \gamma \ddot{x}_w \end{cases} \quad (2.17)$$

Il modello di stato lineare che è necessario ottenere a partire dal sistema di equazioni (2.17) è:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= F\mathbf{x} + Gu \\ \mathbf{y} &= H\mathbf{x} + Ju\end{aligned}$$

L'ingresso u è dato dalla tensione v_m applicata ai motori mentre sono presenti due uscite: y_1 rappresenta l'angolo θ_b di inclinazione del corpo ed y_2 corrisponde alla variabile x_w cioè la posizione delle ruote.

È necessario fare altre sostituzioni nelle variabili che compaiono in (2.17) in modo da rendere più chiaro il procedimento per giungere al modello di stato.

$$\begin{cases} \delta = \frac{K_t}{R_m} \\ \epsilon = m_b l \end{cases}$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} -\epsilon\ddot{x}_w + \alpha\dot{x}_w = \beta\dot{y}_1 + \alpha r\dot{y}_1 - \epsilon g y_1 + \delta u \\ \gamma\ddot{x}_w + \alpha\dot{x}_w = -\epsilon r\dot{y}_1 + \alpha r\dot{y}_1 + \delta u \end{cases} \quad (2.18)$$

Il vettore di stato \mathbf{x} è definito nel seguente modo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_w \\ \dot{x}_w \\ \theta_b \\ \dot{\theta}_b \end{bmatrix}$$

dal quale è possibile ricavare i corrispondenti valori delle 2 uscite:

$$\begin{aligned}y_1 &= x_3 = \theta_b \\ y_2 &= x_1 = x_w\end{aligned}$$

Sostituendo alle variabili di (2.18) le rispettive componenti del vettore di stato si ricava il seguente sistema.

$$\begin{cases} -\epsilon\dot{x}_2 + \alpha x_2 = \beta\dot{x}_4 + \alpha r x_4 - \epsilon g x_3 + \delta u \\ \gamma\dot{x}_2 + \alpha x_2 = -\epsilon r\dot{x}_4 + \alpha r x_4 + \delta u \end{cases}$$

Dalla prima equazione, risolvendo rispetto alla variabile \dot{x}_2 , si ottiene:

$$\dot{x}_2 = \frac{\alpha x_2 + \epsilon g x_3 - \beta \dot{x}_4 - \alpha r x_4 - \delta u}{\epsilon}$$

mentre risolvendo la seconda equazione rispetto alla variabile x_4 , si ricava:

$$\dot{x}_4 = \frac{-\alpha x_2 - \gamma \dot{x}_2 + \alpha r x_4 + \delta u}{-\epsilon r}$$

Raggruppando queste due equazioni si giunge al modello di stato lineare cercato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2 \left(\alpha + \frac{\alpha \beta}{\epsilon r} \right) + x_3 \epsilon g - x_4 \left(\frac{\alpha \beta}{\epsilon} + \alpha r \right) - u \left(\delta + \frac{\beta \delta}{\epsilon r} \right)}{\epsilon - \frac{\beta \gamma}{\epsilon r}} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{-x_2 \left(\alpha + \frac{\alpha \gamma}{\epsilon} \right) - x_3 \gamma g + x_4 \left(\alpha r + \frac{\alpha r \gamma}{\epsilon} \right) + u \left(\delta + \frac{\delta \gamma}{\epsilon} \right)}{\epsilon r - \frac{\beta \gamma}{\epsilon}} \end{aligned}$$

A questo punto è possibile ricavare i valori delle matrici F, G, H, J che descrivono il modello di stato:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= F \mathbf{x} + G u \\ \mathbf{y} &= H \mathbf{x} + J u \end{aligned}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha + \frac{\alpha \beta}{\epsilon r}}{\epsilon - \frac{\beta \gamma}{\epsilon r}} & \frac{\epsilon g}{\epsilon - \frac{\beta \gamma}{\epsilon r}} & \frac{\frac{\alpha \beta}{\epsilon} + \alpha r}{\epsilon - \frac{\beta \gamma}{\epsilon r}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\alpha + \frac{\alpha \gamma}{\epsilon}}{\epsilon r - \frac{\beta \gamma}{\epsilon}} & -\frac{\gamma g}{\epsilon r - \frac{\beta \gamma}{\epsilon}} & \frac{\alpha r + \frac{\alpha r \gamma}{\epsilon}}{\epsilon r - \frac{\beta \gamma}{\epsilon}} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\delta + \frac{\beta \delta}{\epsilon r}}{\epsilon - \frac{\beta \gamma}{\epsilon r}} \\ 0 \\ \frac{\delta + \frac{\delta \gamma}{\epsilon}}{\epsilon r - \frac{\beta \gamma}{\epsilon}} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.5 Funzione di trasferimento

Il modello di stato lineare ricavato è necessario per ottenere la funzione di trasferimento del sistema.

Utilizzando la trasformata di Laplace sfruttando la proprietà della trasformata della derivata, si ottiene:

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= F\mathbf{X}(s) + GU(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= H\mathbf{X}(s) + JU(s) \end{aligned}$$

da cui si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(s) &= (sI - F)^{-1}(\mathbf{x}(0) + GU(s)) \\ \mathbf{Y}(s) &= H(sI - F)^{-1}\mathbf{x}(0) + (H(sI - F)^{-1}G + J)U(s) \end{aligned}$$

Il primo termine di $\mathbf{Y}(s)$ rappresenta l'evoluzione libera del sistema e dipende dunque dalle condizioni iniziali della variabile di stato \mathbf{x} .

Il secondo termine, invece, riguarda l'evoluzione forzata del sistema ed è composto dalla funzione di trasferimento $\mathbf{W}(s)$ moltiplicata per la trasformata di Laplace dell'ingresso $U(s)$.

$$\mathbf{W}(s) = H(sI - F)^{-1}G + J$$

Sono necessarie ulteriori sostituzioni per rendere l'espressione di $\mathbf{W}(s)$ più compatta possibile.

$$\begin{cases} a = \alpha + \frac{\alpha\beta}{\epsilon r} \\ b = \epsilon - \frac{\beta\gamma}{\epsilon r} \\ c = \alpha + \frac{\alpha\gamma}{\epsilon} \end{cases}$$

In questo modo si ottengono la matrice F e consecutivamente $(sI_4 - F)$.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} & \frac{\epsilon g}{b} & -\frac{ar}{b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{c}{br} & -\frac{\gamma g}{br} & \frac{c}{b} \end{bmatrix}, \quad (sI_4 - F) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s - \frac{a}{b} & -\frac{\epsilon g}{b} & \frac{ar}{b} \\ 0 & 0 & s & -1 \\ 0 & \frac{c}{br} & \frac{\gamma g}{br} & s - \frac{c}{b} \end{bmatrix}$$

È necessario calcolare il determinante della matrice $(sI - F)$ per poterne elaborare la matrice inversa.

$$\det(sI_4 - F) = s^4 - s^3 \frac{a+c}{b} + s^2 \frac{g\gamma}{br} + s \frac{cge - ag\gamma}{b^2r}$$

Calcolando $\mathbf{W}(s) = H(sI - F)^{-1}G + J$ si ricava un vettore $\mathbf{W}(s)$ con 2 componenti, in quanto sono presenti 2 uscite.

La componente $\mathbf{W}_1(s)$ corrisponde alla funzione di trasferimento considerando l'uscita y_1 , cioè l'angolo di inclinazione del corpo.

La componente $\mathbf{W}_2(s)$, invece, rappresenta la funzione di trasferimento considerando la seconda uscita y_2 , cioè la posizione del centro di massa delle ruote.

$$\mathbf{W}_1(s) = \frac{s \frac{\delta + \frac{\delta\gamma}{\epsilon}}{br} + \frac{\delta}{b^2r} \left(\frac{c\beta}{\epsilon r} + c - \frac{a\gamma}{\epsilon} - a \right)}{s^3 - s^2 \frac{a+c}{b} + s \frac{g\gamma}{br} + \frac{cge - ag\gamma}{b^2r}} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{W}_2(s) = \frac{-s^2 \frac{\delta + \frac{\beta\delta}{\epsilon r}}{b} - s \frac{\delta}{b^2} \left(\frac{c\beta}{\epsilon r} + c + \frac{a\gamma}{\epsilon} + a \right)}{s^4 - s^3 \frac{a+c}{b} + s^2 \frac{g\gamma}{br} + s \frac{cge - ag\gamma}{b^2r}} \quad (2.20)$$

2.6 Parametri e specifiche

I parametri specifici del sistema e le caratteristiche fisiche del robot sono riportati nella seguente tabella.

Simbolo	Valore	Spiegazione
g	$9.81 \frac{m}{s^2}$	Accelerazione di gravità
b_f	$0.00002 \frac{Ns}{m}$	Coefficiente di attrito viscoso
m_b	0.4 kg	Massa del corpo del robot
l	0.2 m	Distanza tra il centro di massa del corpo e le ruote
I_b	0.0053 kgm^2	Momento d'inerzia del corpo = $\frac{1}{3}m_b l^2$
m_w	0.3 kg	Massa delle ruote
r	0.05 m	Raggio delle ruote
I_w	0.00225 kgm^2	Momento di inerzia delle ruote = $\frac{1}{2}m_w r^2$

Di seguito vengono indicati i valori dei parametri riferiti al motore del robot.

Simbolo	Valore	Spiegazione
R_m	7Ω	Resistenza equivalente
L_m	0 H	Induttanza equivalente
K_e	0.468 Vs	Costante di velocità
K_t	0.317 Vs	Costante di coppia

Sostituendo i valori dei parametri fisici delle tabelle alle equazioni ricavate precedentemente si ottengono i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.424, & a &= 2.682 \\ \beta &= 0.0213, & b &= -0.346 \\ \gamma &= 0.08, & c &= 0.848 \\ \epsilon &= 0.08, & \delta &= 0.0453 \end{aligned}$$

Sostituendo i valori ai rispettivi parametri nelle equazioni (2.19) e (2.20), si ricavano le funzioni di trasferimento $\mathbf{W}_1(s)$ e $\mathbf{W}_2(s)$ in forma numerica.

$$\mathbf{W}_1(s) = \frac{-5.237s - 0.001}{s^3 + 10.2s^2 - 45.38s - 240.4} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{W}_2(s) = \frac{0.83s^2 - 0.0166s - 25.75}{s^4 + 10.2s^3 - 45.38s^2 - 240.4s} \quad (2.22)$$

Il robot deve essere in grado di stabilizzarsi mantenendo l'angolo θ_b al valore nullo, nonostante la presenza di disturbi; inoltre, deve avanzare portandosi a regime alla posizione x_f data dall'ampiezza del gradino posto in ingresso. L'errore a regime permanente, cioè la differenza tra la posizione finale e l'ingresso del sistema, deve essere nullo.

Capitolo 3

Progetto del controllore

Il controllo del robot prevede un primo compensatore che agisca sul sistema tramite retroazione, in modo da rendere stabile la funzione di trasferimento associata all'angolo. Successivamente, sarà necessario progettare un ulteriore compensatore in modo da risolvere il problema del posizionamento.

3.1 Controllore $C_1(s)$

Il progetto del primo controllore prevede l'utilizzo del luogo delle radici in quanto $\mathbf{W}_1(s)$ è instabile. In questo modo è possibile visualizzare tutti i poli della funzione di trasferimento del sistema retroazionato.

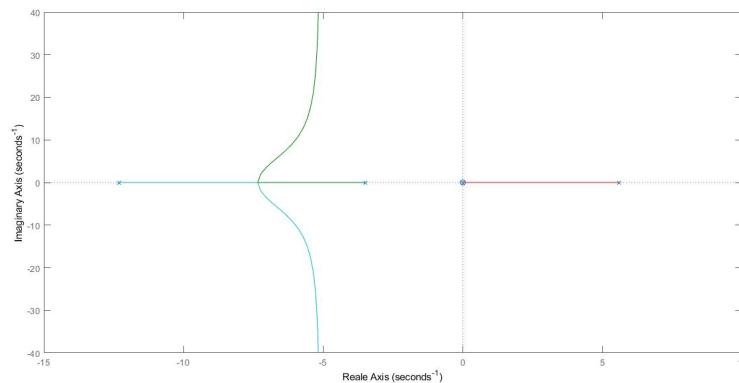


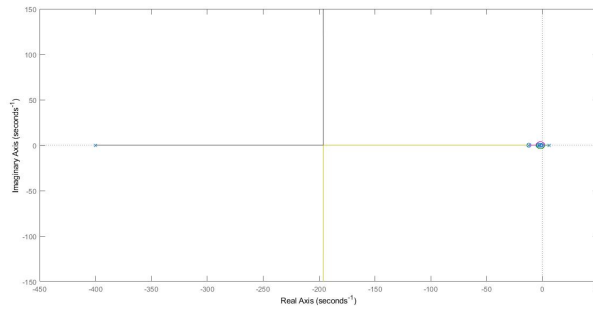
Figura 3.1: Luogo delle radici negativo di $\mathbf{W}_1(s)$

Tramite il luogo negativo di $\mathbf{W}_1(s)$, rappresentato in figura 3.1, si osserva la necessità di un polo a parte reale non negativa nel controllore: in questo modo il ramo a parte reale positiva che parte dal polo $s = 5.594$ viene portato nell'asse negativo tramite un punto doppio. La scelta per tale valore corrisponde al polo nell'origine, in modo da eliminare eventuali disturbi costanti che agiscono in ingresso a $\mathbf{W}(s)$.

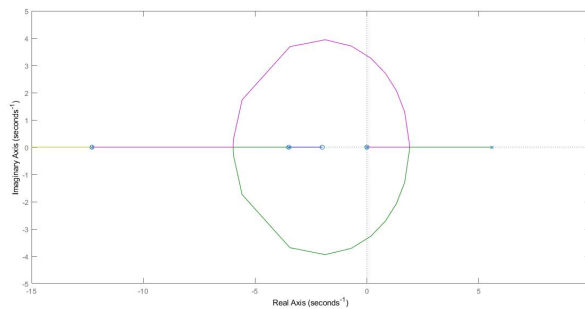
Il compensatore che ne risulta è:

$$\mathbf{C}_1(s) = K \frac{(s + 2)(s + 3.494)(s + 12.3)}{s(s + 0.0013)(s + 400)}$$

Rappresentando il luogo delle radici negativo relativo al sistema in catena aperta $\mathbf{C}_1(s)\mathbf{W}_1(s)$, si ricava un corretto valore per k che porta il sistema retroazionato ad essere BIBO-stabile.



(a) *Full view*



(b) *Particolare intorno all'origine*

Figura 3.2: Luogo delle radici negativo relativo a $\mathbf{C}_1(s)\mathbf{W}_1(s)$

Il valore scelto corrisponde a $k = -1350$, ottenendo il seguente compensatore:

$$C_1(s) = -1350 \frac{(s + 2)(s + 3.494)(s + 12.3)}{s(s + 0.0013)(s + 400)} \quad (3.1)$$

Per verificare che il controllore progettato renda BIBO-stabile il sistema retroazionato, è necessario implementare $W_1(s)$ e $C_1(s)$ in Simulink, collegandolo tramite feedback ed applicando un gradino unitario come in figura 3.3.

In questo modo si osserva che l'uscita del sistema retroazionato tende al valore di riferimento in ingresso, quindi il sistema è BIBO-stabile.

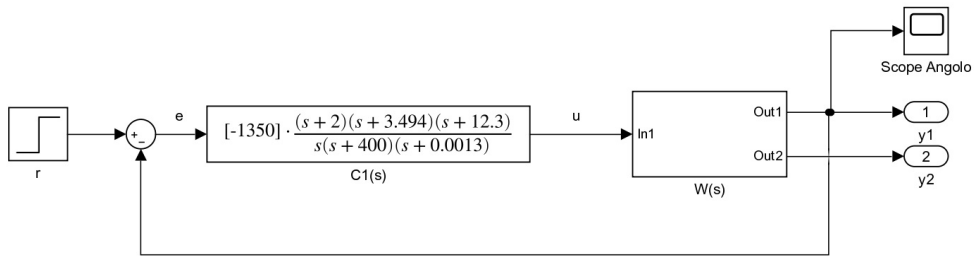


Figura 3.3: Implementazione del controllore $C_1(s)$

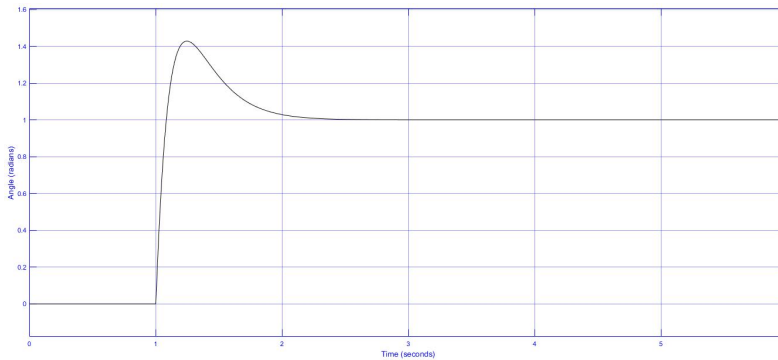


Figura 3.4: Andamento dell'uscita del sistema retroazionato

3.2 Funzione di trasferimento del sistema retroazionato

Prima di iniziare il progetto del secondo controllore, $C_2(s)$, è necessario ricavare la funzione di trasferimento sul cui dovrà agire.

Definendo con L, M, N_1, P_1 le matrici corrispondenti al modello di stato del sistema retroazionato in figura 3.5, è possibile ricavare la funzione di trasferimento attraverso la seguente equazione:

$$\mathbf{W}r_1(s) = N_1(sI - L)^{-1}M + P_1$$

Avendo progettato il controllore $C_1(s)$ in modo da rendere stabile $\mathbf{W}r_1(s)$, si è ottenuto un denominatore che non presenta poli a parte reale positiva. Sapendo che tale denominatore corrisponde al polinomio caratteristico di L , avremo come conseguenza che qualsiasi funzione di trasferimento collegata ad L sarà stabile in quanto presenterà lo stesso denominatore, a meno di cancellazioni zero/polo.

Per ottenere i valori di L, M, N_1, P_1 è necessario ricavare il modello di stato del controllore $C_1(s)$, nel quale è presente l'ingresso e e l'uscita u , come si evince dalla figura 3.5.

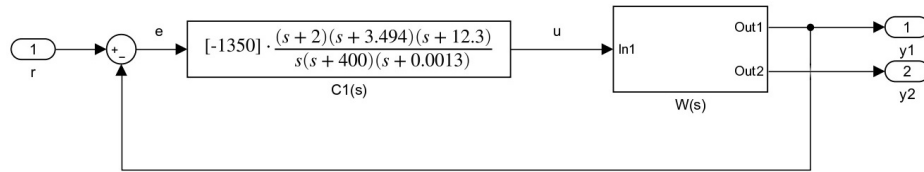


Figura 3.5: Sistema retroazionato

Utilizzando come vettore di stato w si ottengono i seguenti risultati tramite Matlab:

$$\begin{cases} \dot{w} = Aw + Be \\ u = Cw + De \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -400.0013 & -0.7211 \\ 0 & 0.7211 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [-2700 \quad 518700 \quad -79480], \quad D = [-1350]$$

3.2. FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL SISTEMA RETROAZIONATO 19

Il sistema retroazionato avrà come uscite y_1 e y_2 , come ingresso r e come vettore di stato z .

$$\begin{cases} \dot{z} = Lz + Mr \\ y_1 = N_1z + P_1r \\ y_2 = N_2z + P_2r \end{cases}$$

Unendo le equazioni del modello di stato relativo a $\mathbf{W}(s)$ e $\mathbf{C}_1(s)$ si ottiene il modello di stato del sistema retroazionato. Si è rappresentato con H_1 e H_2 rispettivamente la prima e la seconda riga della matrice H .

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + Gu \\ &= Fx + GCw + GDr - GDy_1 \\ &= (F - GDH_1)x + GCw + GDr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Aw + Br - By_1 \\ &= Aw - BH_1x + Br \end{aligned}$$

Utilizzando come vettore di stato $z = \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}$, si ottengono le seguenti matrici:

$$L = \begin{bmatrix} F - GDH_1 & GC \\ -BH_1 & A \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} GD \\ B \end{bmatrix}$$

$$N_1 = [H_1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad N_2 = [H_2 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$P_1 = [0], \quad P_2 = [0]$$

Sostituendo i valori numerici nelle matrici, si ottiene il seguente risultato:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7,751 & 1115,667 & 0,388 & -2235,87 & 429519 & -65819,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 49,01 & -7024,59 & -2,451 & 14139,9 & -2716330 & 416251 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -400,001 & -0,72111 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,72111 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ -1117,93 \\ 0 \\ 7069,95 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad N_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$P_1 = [0], \quad P_2 = [0], \quad N_2 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

Si nota che la dimensione del modello di stato complessivo è data dalla somma delle dimensioni del modello di stato di $\mathbf{W}(s)$ e di $\mathbf{C}_1(s)$. Dalle osservazioni fatte si conclude che anche $Wr_2(s)$ non presenterà poli a parte reale positiva ed è possibile calcolarla mediante le matrici L, M, N_2, P_2 attraverso la seguente equazione:

$$\mathbf{W}r_2(s) = N_2(sI - L)^{-1}M + P_2$$

Utilizzando Matlab per il calcolo di $\mathbf{W}r_2(s)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}r_2(s) &= \frac{-1118(s - 5.571)(s + 5.568)(s + 3.494)(s + 2)(s + 12.3)}{s(s + 381.8)(s + 12.31)(s + 7.811)(s + 4.737)(s + 3.493)(s + 0.0013)} \\ &= 3774 \frac{(1 - \frac{s}{5.571})(1 + \frac{s}{5.568})(1 + \frac{s}{3.494})(1 + \frac{s}{2})(1 + \frac{s}{12.3})}{s(1 + \frac{s}{381.8})(1 + \frac{s}{12.31})(1 + \frac{s}{7.811})(1 + \frac{s}{4.737})(1 + \frac{s}{3.493})(1 + \frac{s}{0.0013})} \end{aligned}$$

espressa in forma di Bode.

3.3 Controllore $C_2(s)$

Il secondo controllore è necessario per risolvere il problema del posizionamento del robot. L'ingresso corrisponde ad un gradino la cui ampiezza indica la posizione finale che deve raggiungere il robot: x_f .

Il secondo controllore dovrà agire sulla funzione di trasferimento $\mathbf{W}r_2(s)$ mediante un secondo feedback.

Per il progetto di $C_2(s)$ è possibile utilizzare il criterio di Bode in quanto $\mathbf{W}r_2(s)$ non presenta poli a parte reale positiva.

Tale criterio afferma che se la funzione di trasferimento in catena aperta $C_2(s)\mathbf{W}r_2(s)$ non ha poli a parte reale positiva ed il suo guadagno di Bode $K_B(\mathbf{W}r_2)K_B(C_2)$ è positivo, allora il sistema retroazionato è BIBO stabile se è presente un'unica pulsazione di attraversamento e si ha un margine di fase positivo.

Il sistema da progettare deve essere di tipo 1 in modo da raggiungere la posizione senza errore a regime permanente, inoltre deve avere un tempo di salita $t_r(10\%) < 15s$ ed un tempo di assestamento $t_s(10\%) < 20s$.

Il vincolo riguardante il tempo di salita pone dei limiti nel dominio della frequenza del sistema in catena aperta.

Tra il tempo di salita $t_r(10\%)$ e la banda passante B_p del sistema retroazionato $\frac{\mathbf{W}r_2(s)C_2(s)}{\mathbf{W}r_2(s)C_2(s)+1}$ è presente la seguente relazione:

$$t_r(10\%) \simeq \frac{2.3}{B_p}$$

inoltre, assumendo la seguente ipotesi:

$$B_p \simeq \omega_a(\mathbf{W}r_2(s)C_2(s))$$

si ottiene la relazione $\omega_a \simeq \frac{2.3}{t_r(10\%)}$. La specifica riguardante il tempo di salita $t_r(10\%)$ viene convertita in una pulsazione di attraversamento desiderata $\omega_a^* \geq 0.2 \frac{rad}{s}$ ed in un margine di fase $m_\phi^* \simeq 90^\circ$.

Analizzando il diagramma di Bode del modulo di $\mathbf{W}r_2(s)$, in figura 3.6, si osserva che la pulsazione di attraversamento $\omega_a = 3 \frac{rad}{s}$ risolve la specifica richiesta.

La figura 3.7 corrisponde al diagramma di Bode della fase di $\mathbf{W}r_2(s)$, alla pulsazione di attraversamento ω_a si ha una fase di circa -180° , quindi, il margine di fase vale $m_\phi \simeq 0^\circ$. Il controllore deve agire nel sistema aumentando il margine di fase di circa 90° , ma mantenendo invariata la pulsazione

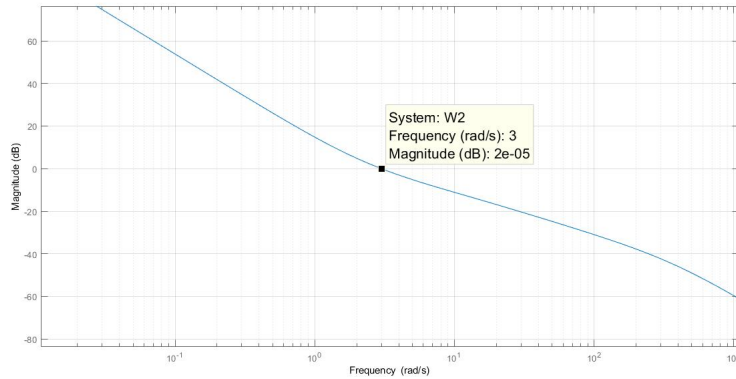


Figura 3.6: Diagramma di Bode del modulo di $\mathbf{W}r_2(s)$

di attraversamento. Il progetto del controllore $C_2(s)$ può essere suddiviso in due azioni correttive indipendenti.

$$C_2(s) = C'_2(s)C''_2(s)$$

$C'_2(s)$ definisce il tipo e l'errore a regime permanente, mentre da $C''_2(s)$ dipendono il margine di fase e la pulsazione di attraversamento.

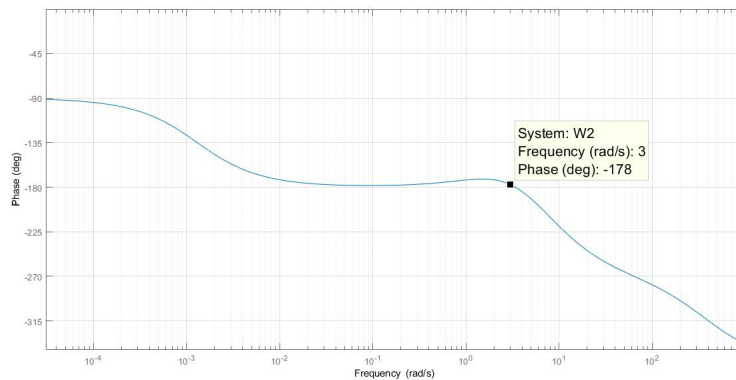


Figura 3.7: Diagramma di Bode della fase di $\mathbf{W}r_2(s)$

La presenza del polo nell'origine di $\mathbf{W}r_2(s)$ garantisce un errore a regime permanente nullo con ingresso a gradino in quanto, avendo un sistema $G(s)$

ed un ingresso $r(t)$, si ha un errore a regime permanente definito da:

$$e_{rp} = |r_{rp} - y_{rp}| = |1 - G(0)|$$

Se $G(0) = 1$ si ha un errore a regime nullo ad un ingresso costante e si risolve il problema di regolazione. $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, quindi considerando il sistema retroazionato:

$$\frac{G(0)}{1 + G(0)} = \frac{n(0)}{d(0) + n(0)} = 1 \longrightarrow n(0) = n(0) + d(0) \longrightarrow d(0) = 0$$

Per risolvere il problema di regolazione mediante retroazione è necessario che sia presente un polo nell'origine nel sistema in catena aperta.

In questo caso il sistema da considerare è $C_2(s)W\mathbf{r}_2(s)$, quindi la presenza di un polo nell'origine in $W\mathbf{r}_2(s)$ definisce un sistema retroazionato di tipo 1 senza alcuna azione correttiva.

Sapendo che $K_B(W\mathbf{r}_2)$ è positivo si ricava $C_2'(s) = 1$.

L'unica azione correttiva che è necessaria è data da $C_2''(s)$.

$$C_2(s) = C_2''(s)$$

Il compensatore $C_2(s)$ deve migliorare le prestazioni nel transitorio, aumentando il margine di fase, quindi è necessario utilizzare una rete a sella, cioè una rete ritardatrice seguita da una rete anticipatrice.

Attraverso la rete ritardatrice si abbassa il modulo di un valore pari a $20dB$ per ogni decade di distanza tra il polo(p_1) e lo zero(z_1).

Volendo mantenere la pulsazione di attraversamento invariata, è necessario aumentare il modulo dello stesso valore nella pulsazione di attraversamento tramite una rete anticipatrice, cioè una coppia zero(z_2) e polo (p_2).

Il vantaggio sarà dato dalla presenza di due zeri ed un solo polo prima di ω_a quindi un margine di fase superiore di circa 90° .

La rete anticipatrice aumenta il modulo di $20dB$ per ogni decade di distanza tra z_2 ed ω_a . Quindi la distanza tra p_1 e z_1 deve essere uguale alla distanza tra z_2 ed ω_a per mantenere la stessa pulsazione di attraversamento.

Il polo p_2 della rete anticipatrice è necessario solo per avere un compensatore proprio, quindi fisicamente realizzabile.

La sua posizione sarà in alta frequenza in modo da non variare l'andamento della fase e del modulo nei pressi di ω_a .

Ponendo la distanza tra p_1 e z_1 di una decade, quindi, $p_1 = -\frac{1}{1000} \frac{rad}{s}$ e $z_1 = -\frac{1}{100} \frac{rad}{s}$, si ha che z_2 deve essere posizionato una decade prima della

pulsazione di attraversamento $\omega_a = 3 \frac{rad}{s}$, per cui si ottiene $z_2 = -\frac{3}{10} \frac{rad}{s}$. Quindi, l'espressione finale di $C_2(s)$ è:

$$C_2(s) = K \frac{(1 + \frac{s}{0.01})(1 + \frac{s}{0.3})}{(1 + \frac{s}{0.001})(1 + \frac{s}{p_2})}$$

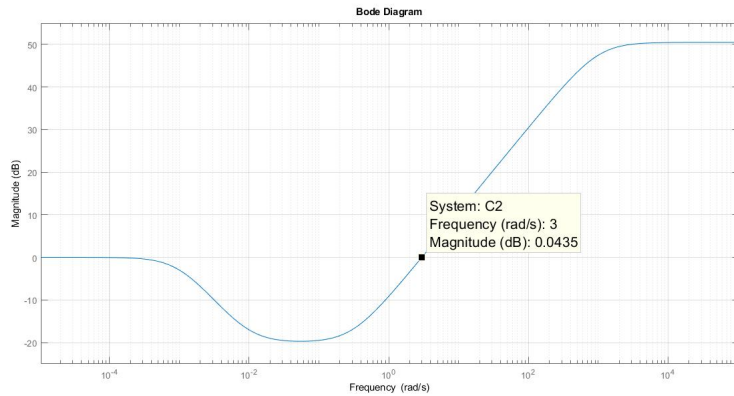


Figura 3.8: Diagramma di Bode del modulo di $C_2(s)$

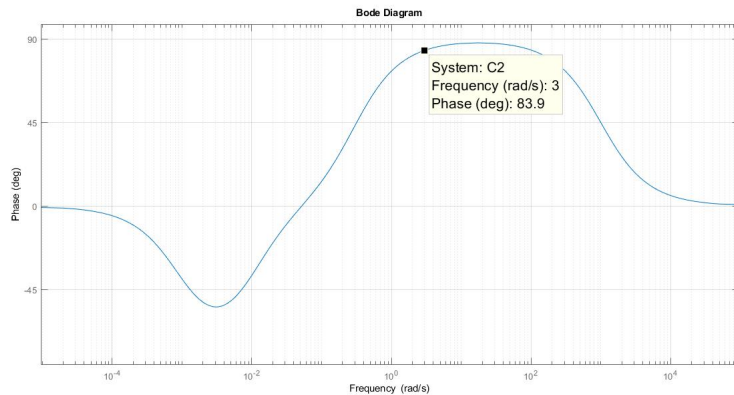


Figura 3.9: Diagramma di Bode della fase di $C_2(s)$

Osservando il diagramma di Bode del modulo del controllore, si nota che l'ampiezza per $\omega_a = 3 \frac{rad}{s}$ corrisponde a 0dB, quindi la pulsazione di attraversamento resta invariata.

In figura 3.9 si osserva che il controllore presenta una fase di 84° per la pulsazione ω_a , quindi utilizzando questo controllore il margine di fase dovrebbe portarsi a circa 86° .

Il polo p_2 , necessario a rendere il controllore proprio, viene fissato a $-1000 \frac{rad}{s}$.

$$C_2(s) = K \frac{(1 + \frac{s}{0.01})(1 + \frac{s}{0.3})}{(1 + \frac{s}{0.001})(1 + \frac{s}{1000})}$$

Avendo rispettato tutte le ipotesi poste dal criterio di Bode si è così garantita la BIBO-stabilità del sistema retroazionato.

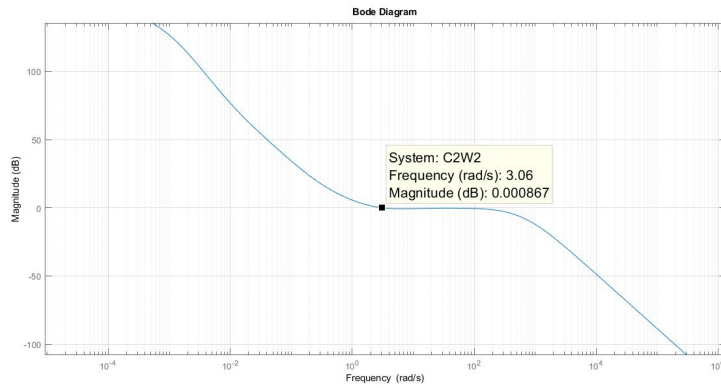


Figura 3.10: Diagramma di Bode del modulo di $\mathbf{W}r_2(s)C_2(s)$

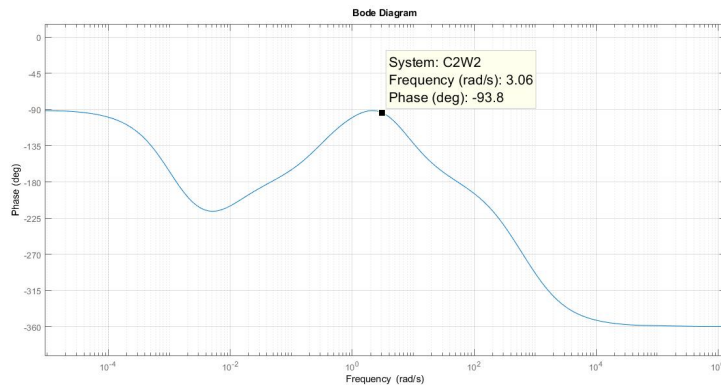


Figura 3.11: Diagramma di Bode della fase di $\mathbf{W}r_2(s)C_2(s)$

Osservando i diagrammi di Bode di figura 3.10 e 3.11, si nota che le specifiche riguardanti margine di fase e pulsazione di attraversamento sono state soddisfatte.

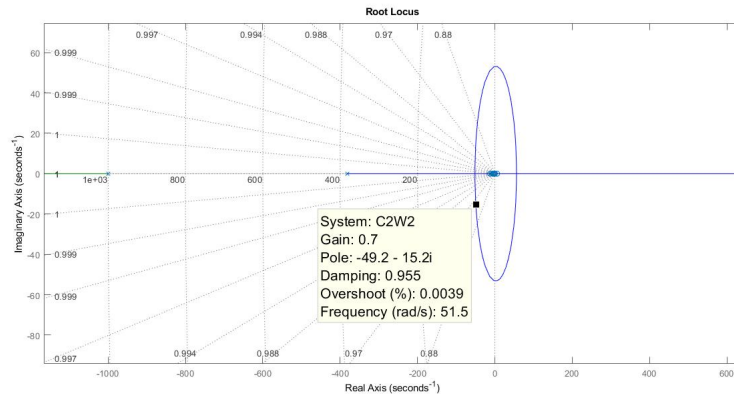


Figura 3.12: Luogo delle radici positivo di $\mathbf{W}r_2(s)\mathbf{C}_2(s)$

Per determinare il valore di k tale da minimizzare l'effetto dei poli con parte immaginaria non nulla e, quindi, migliorare l'andamento nel transitorio, si analizza il luogo delle radici positivo di $\mathbf{W}r_2(s)\mathbf{C}_2(s)$.

Sono presenti due punti in cui il luogo presenta poli complessi, rispettivamente visualizzati dalle figure 3.12 e 3.13.

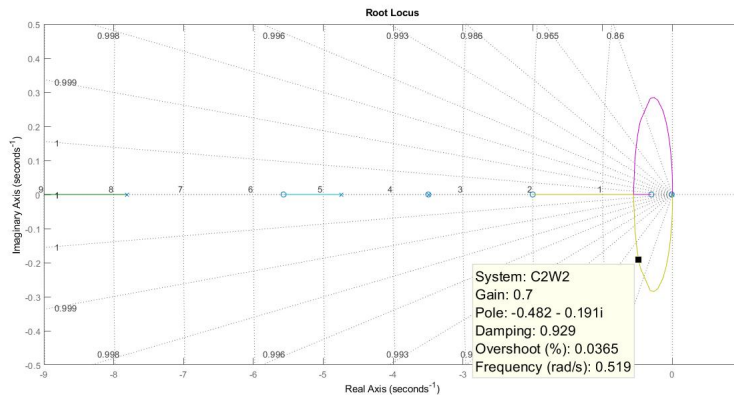


Figura 3.13: Particolare in un intorno dell'origine del luogo delle radici positivo di $\mathbf{W}r_2(s)\mathbf{C}_2(s)$

Analizzando i due grafici si ottiene che per $k \simeq 0.7$ lo smorzamento delle due coppie di poli complessi coniugati è bilanciato, quindi si fissa k a tale valore ottenendo il seguente controllore:

$$\mathbf{C}_2(s) = 0.7 \frac{(1 + \frac{s}{0.01})(1 + \frac{s}{0.3})}{(1 + \frac{s}{0.001})(1 + \frac{s}{1000})} \quad (3.2)$$

3.4 Modello Simulink e simulazioni

Per poter simulare gli andamenti temporali delle uscite è necessario implementare il sistema in Simulink.

Il modello lineare del robot è realizzato attraverso un blocco *state-space* in modo da testare l'effetto delle retroazioni e poter variare le condizioni iniziali.

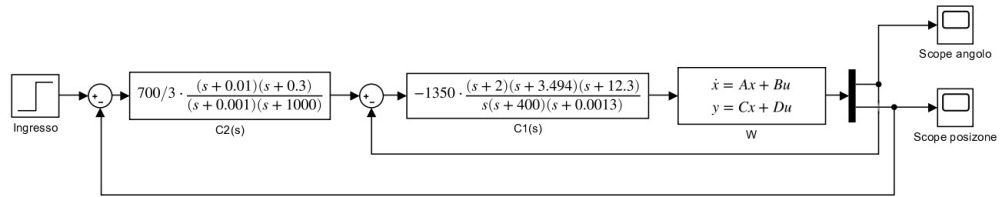


Figura 3.14: Schema a blocchi del sistema di controllo con modello linearizzato

Nelle analisi seguenti si è considerato come ingresso un gradino di ampiezza unitaria che commuti all'istante $t = 1s$, quindi il robot deve portarsi a regime alla posizione $x_f = 1m$. Effettuando una simulazione si ottengono le seguenti figure relative rispettivamente all'evoluzione della posizione del robot $x_w(t)$ e dell'angolo $\theta_b(t)$.

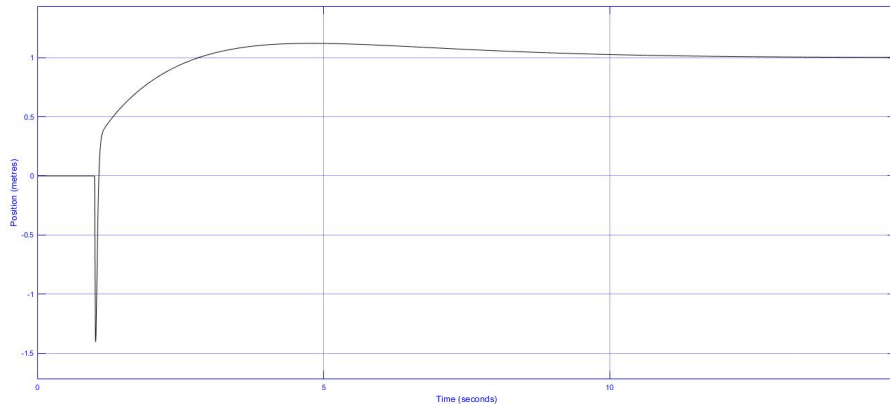


Figura 3.15: Andamento di $x_w(t)$

Il transitorio presenta un significativo undershoot, ma il sistema risponde velocemente al gradino con tempo di salita pari a $t_r(10\%) = 1.33s$ e tempo di assestamento pari a $t_s(10\%) = 5.19s$.

Analizzando la figura 3.16 si nota che l'ampiezza dell'angolo è eccessiva, di fatto risolve il problema lineare, ma, presentando picchi di qualche radiante, non sarebbe in grado di controllare un sistema reale.

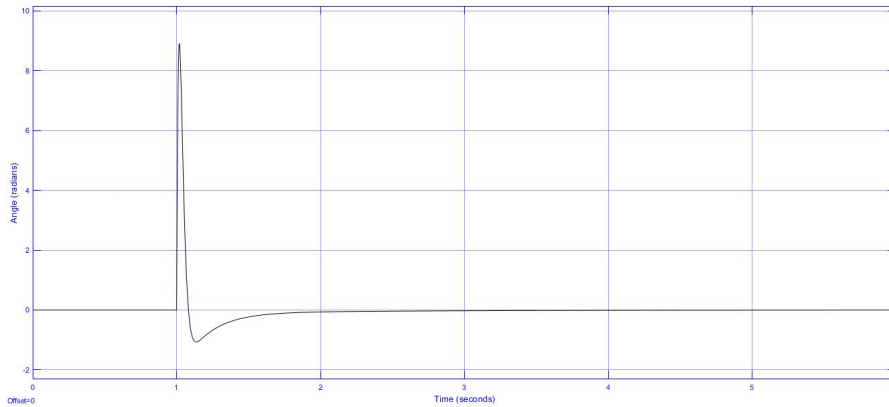


Figura 3.16: Andamento di $\theta_b(t)$

In ultima analisi è stato visualizzato l'ingresso del sistema $\mathbf{W}(s)$, cioè la tensione applicata ai motori, per verificare se corrisponda a valori fisicamente tollerati.

I motori utilizzati hanno una tensione massima di lavoro di $15V$; nella figura 3.17 si nota un picco di $-300000V$, quindi fisicamente non realistico.

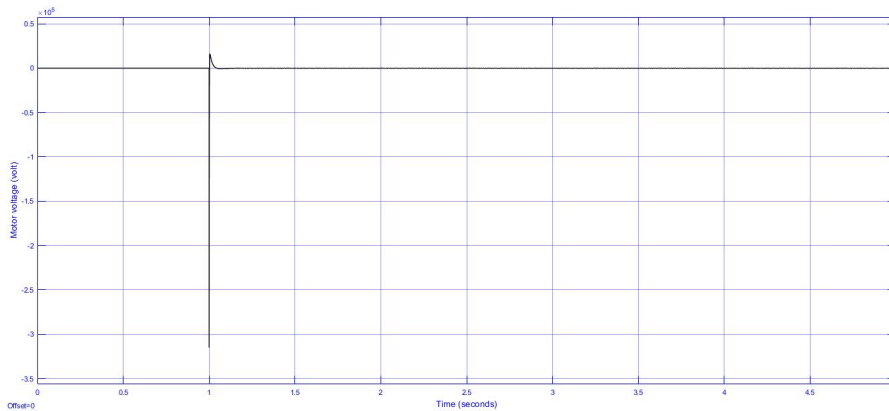


Figura 3.17: Andamento della tensione dei motori

Questo problema potrebbe essere risolto mediante un blocco *sat* posto in ingresso al modello di stato del robot, come in figura 3.18.

Il blocco *sat* costituisce un sistema con un ingresso x ed un'uscita y e richiede due parametri: un valore minimo v_{min} e un valore massimo v_{max} .

Il valore di y è definito dal seguente sistema:

$$y = \begin{cases} v_{min} & x < v_{min} \\ x & v_{min} \leq x \leq v_{max} \\ v_{max} & x > v_{max} \end{cases}$$

In questo modo si limitano le tensioni entro degli estremi massimi e minimi che rappresentano le tensioni di lavoro dei motori.

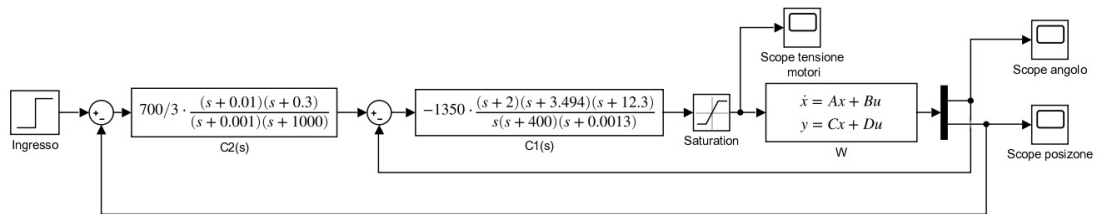


Figura 3.18: Modello in Simulink utilizzando un blocco *sat*

Utilizzando un blocco *sat*, limitando la tensioni a valori che stanno in un range tra $-15V$ e $15V$, il sistema diventa non-lineare.

Come si nota dalla figura 3.19, che rappresenta l'andamento della posizione, il blocco *sat* rende instabile il sistema.

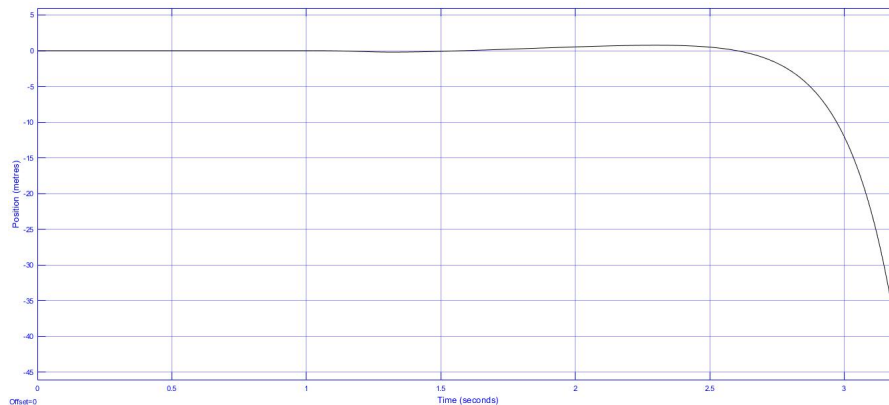


Figura 3.19: Instabilità del sistema utilizzando un blocco *sat*

La presenza di un ingresso a gradino, avendo derivata impulsiva, causa eccessive elongazioni nel transitorio.

La soluzione consiste nel modificare l'ingresso, sostituendo il gradino con un trapezio, cioè un segnale che presenta derivata finita.

Procedendo in questo modo, oltre a migliorare l'andamento del transitorio, si riduce l'entità dell'ingresso, quindi la tensione applicata ai motori.

L'implementazione di un ingresso a trapezio può essere fatta partendo da un ingresso a gradino di ampiezza k ed integrandolo finché non raggiunge un valore di saturazione, il quale definisce la posizione finale x_f .

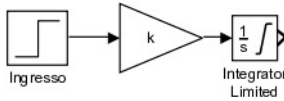


Figura 3.20: Blocchi dell'ingresso a trapezio

La derivata di questo segnale, prima di raggiungere il valore finale, è k . Aumentando la sua entità, a parità di valore di saturazione, si ottiene una rampa più pendente ed una risposta al sistema più veloce.

Considerando il valore di saturazione dell'integratore posto ad 1, il requisito di $t_r(10\%) < 15s$ impone $k \geq \frac{1}{15}$.

Analizzando la figura 3.21 si osserva che utilizzando $k = \frac{1}{15}$ l'andamento della posizione del robot non presenta undershoot, inoltre l'overshoot è del 4%. Si ha, quindi, $t_r(10\%) = t_s(10\%) = 13.48s$.

Un assestamento all'1% avviene dopo un tempo $t_s(1\%) = 22.65s$.

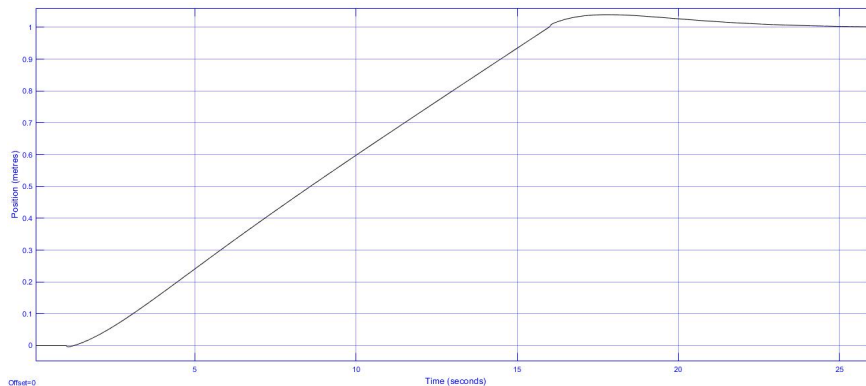


Figura 3.21: Andamento della posizione per $k = \frac{1}{15}$

La figura 3.22 mostra che gli scostamenti dell'angolo del corpo del robot sono stati ridotti notevolmente, raggiungendo al massimo picchi di centesimi

di radiante.

Osservando la figura 3.23 si osserva che i valori dell'andamento della tensione necessaria a comandare i motori rientrano nel range di lavoro dei motori utilizzati.

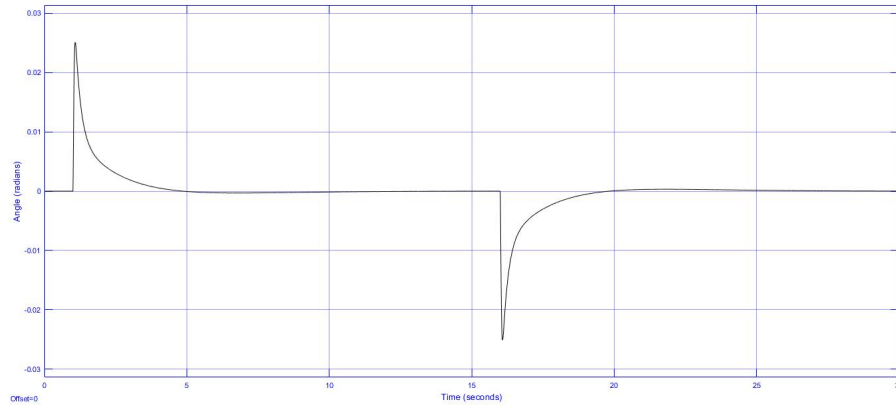


Figura 3.22: Andamento dell'angolo per $k=\frac{1}{15}$

Il sistema è, quindi, in grado di controllare l'angolo ed il posizionamento del modello linearizzato del robot soddisfacendo le specifiche temporali sull'andamento.

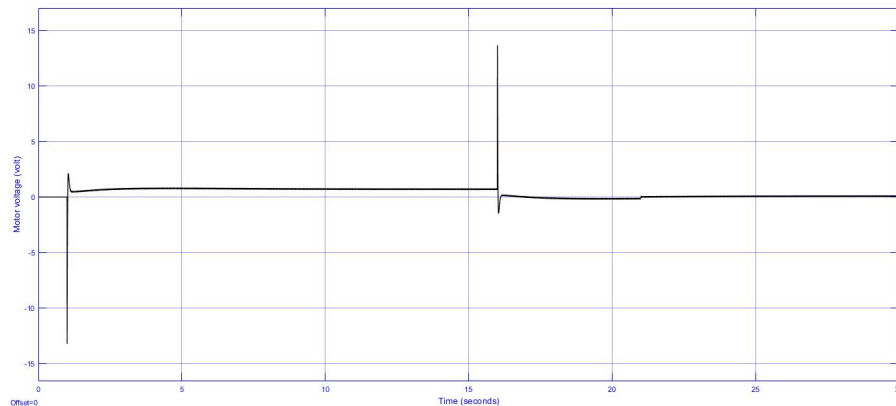


Figura 3.23: Andamento della tensione dei motori per $k=\frac{1}{15}$

Aumentando la derivata dell'ingresso a trapezio, quindi la costante k , si ottiene un sistema più veloce, con tempi di salita e di assestamento inferiori. Lo svantaggio sarebbe di presentare tensioni d'ingresso del sistema eccessive,

che non rientrerebbero nel range di lavoro dei motori utilizzati.

Volendo ottenere dei tempi di salita inferiori, con il robot in questione e con lo stesso sistema di controllo, sarebbe necessario avere dei motori in grado di gestire tensioni superiori.

Le ipotesi fatte prevedevano posizione iniziale ed angolo iniziale nulli, e posizione finale pari ad $1m$. Con tali obiettivi è possibile utilizzare $k = \frac{1}{15}$, mentre, nel caso di specifiche diverse, che richiedano maggior potenza (per esempio nel caso in cui la posizione finale da raggiungere sia di $10m$), il valore di k deve essere inferiore.

3.4.1 Simulazioni con condizioni iniziali non nulle

Il sistema linearizzato deve essere in grado di raggiungere a regime la posizione x_f con angolo nullo, indipendentemente dalle condizioni iniziali poste. Variando la condizione iniziale sulla posizione, per esempio fissando $x_i = 10m$ e $x_f = 5m$, si osserva l'andamento del robot dalla figura 3.24. Sono presenti overshoot ed undershoot ma il sistema resta veloce, come nel caso di condizioni iniziali nulle.

Analizzando, invece, l'andamento del robot con angolazione del corpo iniziale pari a $\theta_{bi} = 10^\circ \simeq 0.17rad$, mantenendo la posizione iniziale nulla e quella da raggiungere a regime pari ad 1, si ottiene un andamento del robot dato dalle figure 3.25 e 3.26. Si osserva un transitorio che non presenta significativi overshoot e mantiene lo stesso tempo di salita dei casi precedenti, in quanto trattasi di un sistema lineare.

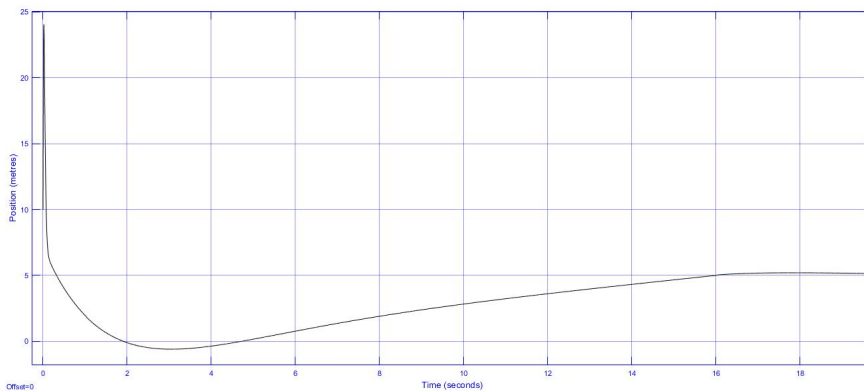


Figura 3.24: Andamento di $x_w(t)$ con posizione iniziale non nulla

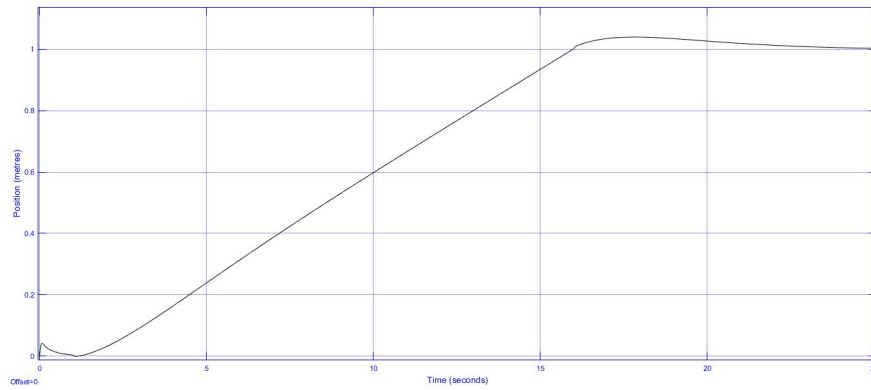


Figura 3.25: Andamento di $x_w(t)$ con angolazione iniziale non nulla

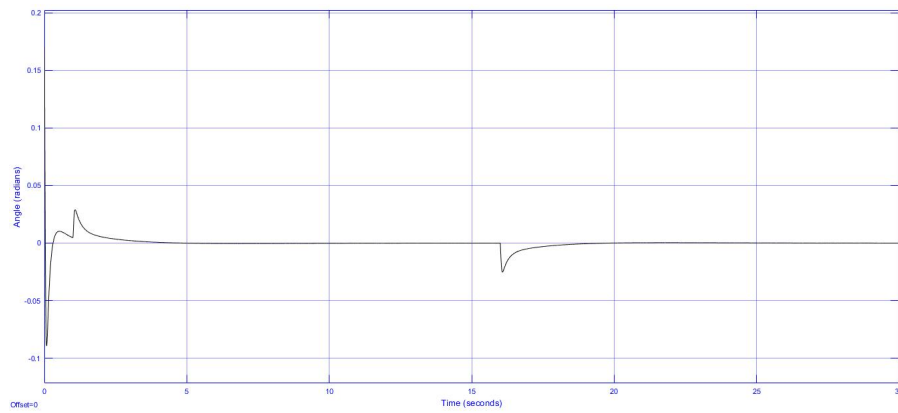


Figura 3.26: Andamento di $\theta_b(t)$ con angolazione iniziale non nulla

Capitolo 4

Analisi del sistema non-lineare

Nel capitolo 2, dopo aver ricavato i modelli matematici non-lineari del robot, è stato necessario linearizzare tali equazioni in modo da ottenere un modello di stato e, quindi, una coppia di funzioni di trasferimento.

In questo capitolo verrà analizzato il comportamento del sistema di controllo progettato nel capitolo 3, nel caso di modello reale (non-lineare).

Per quest'analisi è necessario riprendere le due equazioni del sistema (2.16) del modello non lineare e sostituire ad $x_w, \dot{x}_w, \theta_b, \dot{\theta}_b$, rispettivamente, le variabili di stato utilizzate nel modello lineare x_1, x_2, x_3, x_4 .

Facendo alcune sostituzioni, in modo da rendere le equazioni in forma esplicita rispetto alle variabili \dot{x}_2 e \dot{x}_4 , si ottengono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & \frac{x_2 \left(\alpha + \frac{\alpha\beta}{\epsilon \cos(x_3)} \right) + \epsilon g \sin(x_3) - x_4 \left(\alpha r + \frac{\alpha\beta}{\epsilon \cos(x_3)} + \beta x_4 \tan(x_3) \right)}{\epsilon \cos(x_3) - \frac{\beta\gamma}{\epsilon \cos(x_3)}} + \\ & - \frac{u \left(\delta + \frac{\beta\delta}{\epsilon \cos(x_3)} \right)}{\epsilon \cos(x_3) - \frac{\beta\gamma}{\epsilon \cos(x_3)}} \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & \frac{-x_2 \left(\alpha + \frac{\alpha\gamma}{\epsilon \cos(x_3)} \right) - \gamma g \tan(x_3) + x_4 \left(\alpha r + \frac{\alpha\gamma}{\epsilon \cos(x_3)} + \epsilon r x_4 \sin(x_3) \right)}{\epsilon \cos(x_3) - \frac{\beta\gamma}{\epsilon \cos(x_3)}} + \\ & \frac{u \left(\delta + \frac{\gamma\delta}{\epsilon \cos(x_3)} \right)}{\epsilon \cos(x_3) - \frac{\beta\gamma}{\epsilon \cos(x_3)}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dalla definizione del vettore di stato si ha che $\dot{x}_1 = x_2$ e $\dot{x}_3 = x_4$.

A questo punto è possibile implementare il modello tramite uno schema a blocchi in Simulink, ricavando il seguente schema:

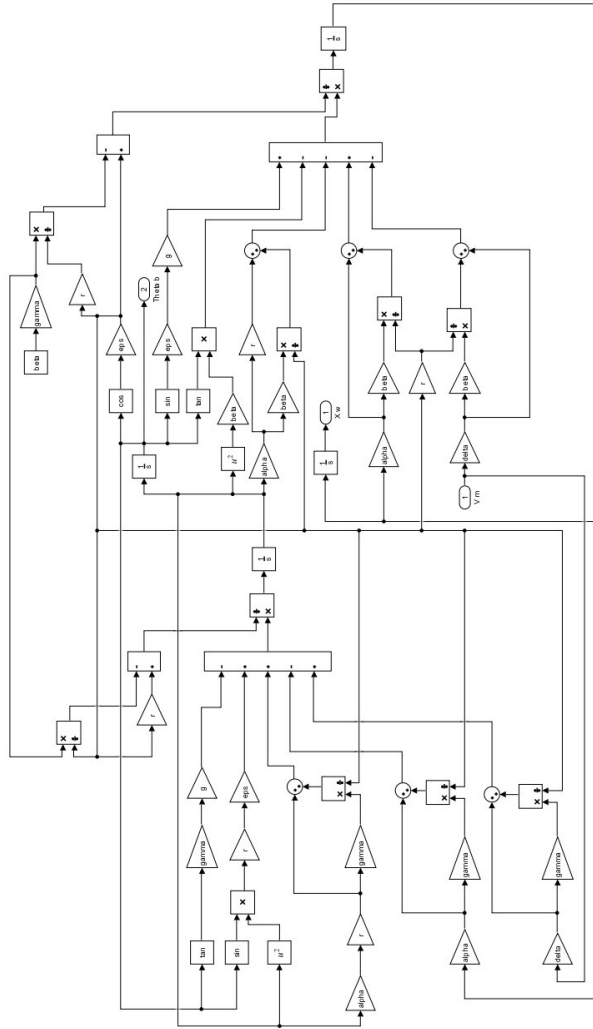


Figura 4.1: Schema in Simulink del modello non-lineare

4.1 Analisi dei punti di equilibrio

Per ricavare i punti di equilibrio del sistema non-lineare è necessario porre, per definizione, $\dot{\mathbf{x}} = 0$, da cui si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -u \frac{\beta \delta}{\text{erccos}(x_3)} + \epsilon g \text{sen}(x_3) - \delta u = 0 \\ \dot{x}_3 = x_4 = 0 \\ \dot{x}_4 = u \left(\delta + \frac{\delta \gamma}{\epsilon} \right) - g \gamma x_3 \end{cases}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni pari al sottospazio lineare generato dal vettore

$$\mathbf{x}_{eq} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \quad u_{eq} = [0]$$

da cui è possibile ricavare $y_{1eq} = x_{3eq} = 0$ e $y_{2eq} = x_{1eq}$.

Il sistema non lineare presenta infiniti punti di equilibrio corrispondenti ad angolo nullo ed a posizione qualsiasi.

Considerando il sistema lineare analizzato nel capitolo 2 e sapendo che lavora con scostamenti delle variabili dal punto di equilibrio intorno al quale si è linearizzato il sistema, si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= F(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq}) + Gu \\ \mathbf{y} &= H(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq}) + \mathbf{y}_{eq} \end{aligned}$$

dove \mathbf{x} e \mathbf{y} sono rispettivamente il vettore di stato e l'uscita del modello non lineare.

Riferendosi alla figura 4.2 si possono scrivere le seguenti relazioni.

$$\begin{aligned} e_2 &= r_2 - H_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq}) \\ e_1 &= r_1 - H_2(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{eq}) \end{aligned}$$

dove H_1 e H_2 sono rispettivamente le prime due righe di H .

Nel modello non lineare definendo con $f(\mathbf{x}, u)$ le equazioni di stato (4.1) e (4.2) oltre a $\dot{x}_1 = x_2$ e $\dot{x}_3 = x_4$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}, u) \\ y_1 &= x_3 \\ y_2 &= x_1 \end{aligned}$$

che, unito alle precedenti relazioni, fornisce:

$$e_1 = r_1 - y_2 + y_{2eq}$$

$$e_2 = r_2 - y_1 + y_{1eq}$$

Ricordando i valori di y_{1eq} e y_{2eq} , si derivano:

$$e_1 = r_1 - y_2 + x_{1eq}$$

$$e_2 = r_2 - y_1$$

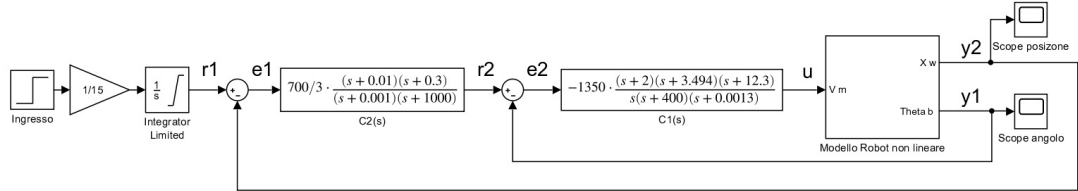


Figura 4.2: Sistema con modello non lineare

Quindi in ingresso al controllore $C_2(s)$ si deve avere $r_1 - y_2 + x_{1eq}$.

La linearizzazione fatta nel capitolo 2 non dipende dal punto di equilibrio considerato, in quanto è stata fatta rispetto alla coordinata angolare θ_b . Gli infiniti punti di equilibrio del sistema differiscono solo per la coordinata spaziale x_w , quindi, a prescindere dal punto di equilibrio scelto, si sarebbe ricavato lo stesso modello linearizzato.

Nel sistema non-lineare, invece, a seconda del punto di equilibrio esaminato si ottengono risultati differenti.

Linearizzando il sistema nella posizione iniziale x_i , quindi considerando come punto di equilibrio $x_{1eq} = x_i$, si risolve il problema di controllo del sistema non lineare, come si osserva nella figura 4.3.

Tale risultato, nonostante sembri funzionare, è concettualmente sbagliato: il punto di equilibrio da utilizzare è quello d'arrivo e non quello di partenza.

Questo risultato è dovuto al fatto che il sistema linearizzato non varia modificandone il punto di equilibrio, quindi, anche una linearizzazione nel punto di partenza, in questo caso, sembra funzionare correttamente.

Nel caso di un generico sistema non lineare, l'unico modo per garantire la sua stabilità è linearizzare intorno al punto di equilibrio relativo allo stato

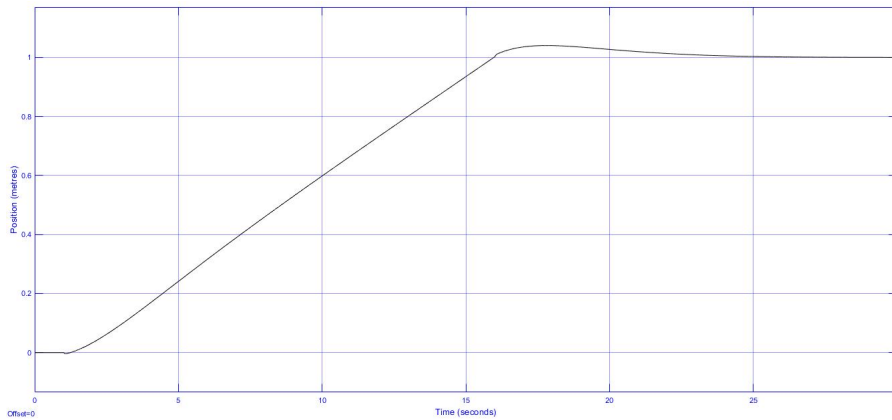


Figura 4.3: Andamento della posizione con $x_{1eq} = x_i = 0$

finale in cui si dovrà trovare il robot.

Quindi, nel caso di posizione a regime x_f pari a $1m$, il valore da considerare come punto di equilibrio è $x_{1eq} = x_f = 1m$.

Il valore dell'ingresso del sistema, a regime, determina lo scostamento dal punto di equilibrio.

Avendo considerato come punto di equilibrio x_f , è necessario che non sia presente alcuno scostamento da tale valore nell'uscita y_2 del sistema, quindi l'ingresso deve essere nullo.

L'azione di "ingresso" che definisce la posizione a regime del robot agisce come y_{2eq} e non nell'ingresso del sistema; se fosse presente anche un ingresso si avrebbe uno scostamento dal punto di equilibrio a regime di tale valore.

Alla luce di queste considerazioni si ricava lo schema a blocchi di figura 4.4.

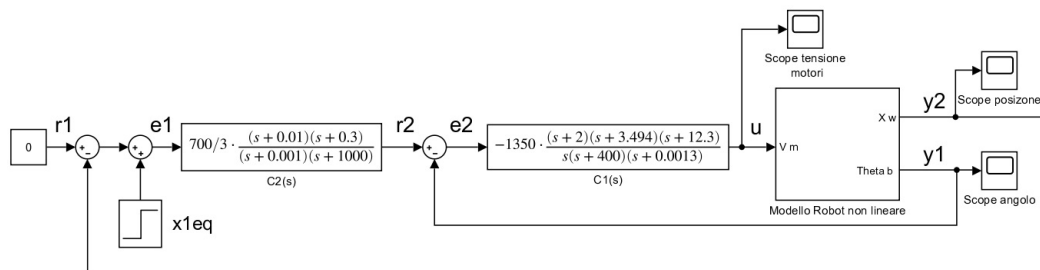


Figura 4.4: Sistema non lineare considerando come punto di equilibrio quello relativo alla posizione finale

A questo punto si spiega che il corretto funzionamento dello schema di figura 4.2 si aveva in quanto equivalente allo schema di figura 4.4, nonostante fosse concettualmente errato.

Il sistema di figura 4.4 risulta instabile con $x_{1eq} = 1m$, il motivo è dato dalla presenza di segnali di ampiezza troppo elevata che fanno uscire il sistema dall'intorno in cui la linearizzazione approssima correttamente il modello reale, infatti utilizzando un valore di posizione a regime pari a $x_1 = 0.01m$ il sistema torna ad essere stabile.

Per raggiungere il valore a regime è necessario utilizzare una rampa in modo da variare nel continuo i punti di equilibrio e far avanzare il robot senza fare uscire il sistema dall'intorno in cui la linearizzazione "funziona".

Il sistema a regime avrà come punto di equilibrio la posizione finale del robot, ma la raggiungerà con una determinata lentezza definita dalla pendenza della rampa.

Per rappresentare la rampa corrispondente al punto di equilibrio y_{2eq} si utilizza lo schema di figura 3.20 con $k = \frac{1}{15}$.

Il modello a blocchi ottenuto è rappresentato in figura 4.5

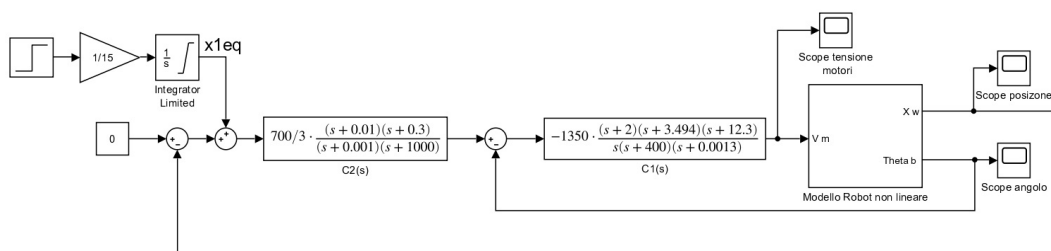


Figura 4.5: Sistema con modello non lineare

4.2 Simulazioni del sistema con Simulink

Considerando il sistema precedente con x_{1eq} corrispondente ad una rampa che ha 1 come valore a regime, si hanno gli andamenti della posizione, della coordinata angolare e della tensione applicata ai motori rispettivamente di figura 4.6, 4.7, 4.8.

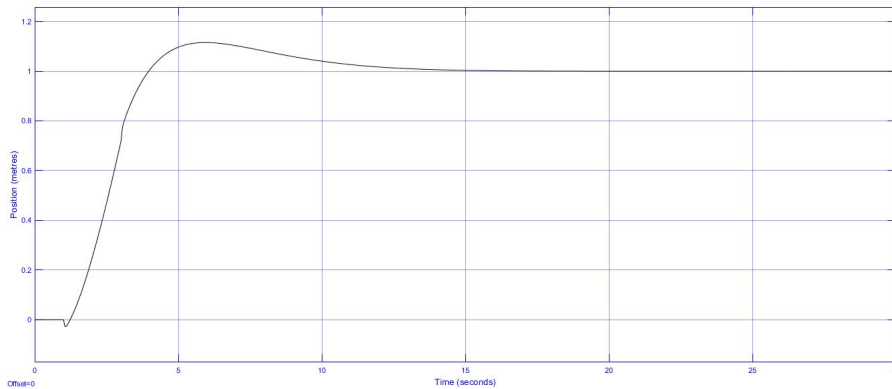


Figura 4.6: Andamento della posizione $x_w(t)$ nel sistema non lineare

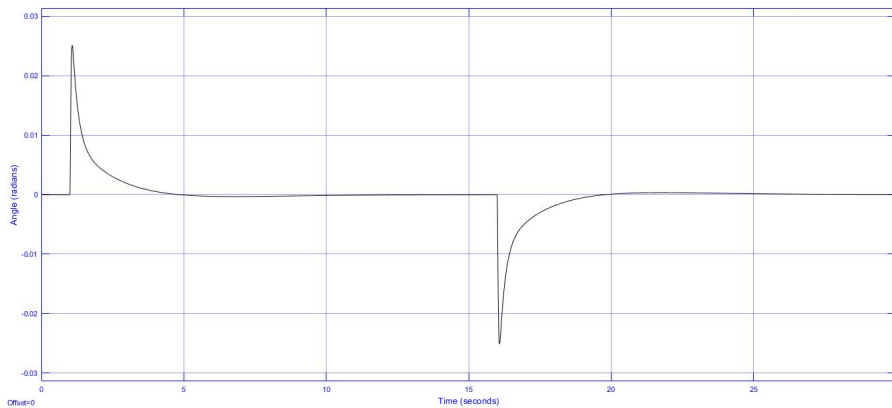


Figura 4.7: Andamento dell'angolo $\theta_b(t)$ nel sistema non lineare

Tali risultati corrispondono agli andamenti che si avevano nel caso di sistema lineare. Il fatto di avere un'evoluzione di $\theta_b(t)$ con picchi di al massimo $0.0251\text{rad} \simeq 1.44^\circ$, rende la linearizzazione efficace, e per questo i grafici dei vari andamenti sono praticamente coincidenti.

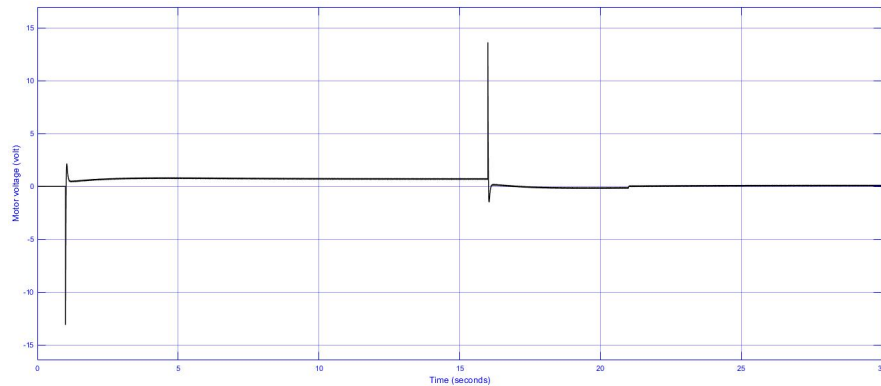


Figura 4.8: Andamento della tensione dei motori nel sistema non lineare

Aumentando la pendenza della rampa, il sistema diventa più veloce ma l'ampiezza dei segnali sarebbe maggiore e potrebbe causare l'uscita dall'intorno in cui la linearizzazione è efficace, causando andamenti indesiderati od instabilità. Nella figura 4.9 si notano picchi nell'evoluzione della coordinata angolare pari a $0.189\text{rad} \simeq 10.83^\circ$ ma il sistema resta stabile. In tali condizioni l'andamento è peggiorato rispetto al caso $k = \frac{1}{15}$, come si osserva in figura 4.10, presentando un overshoot più rilevante e con la tensione dei motori che raggiunge valori non tollerabili.

La pendenza di y_{2eq} con $k > 3.2$ causa l'instabilità del sistema.

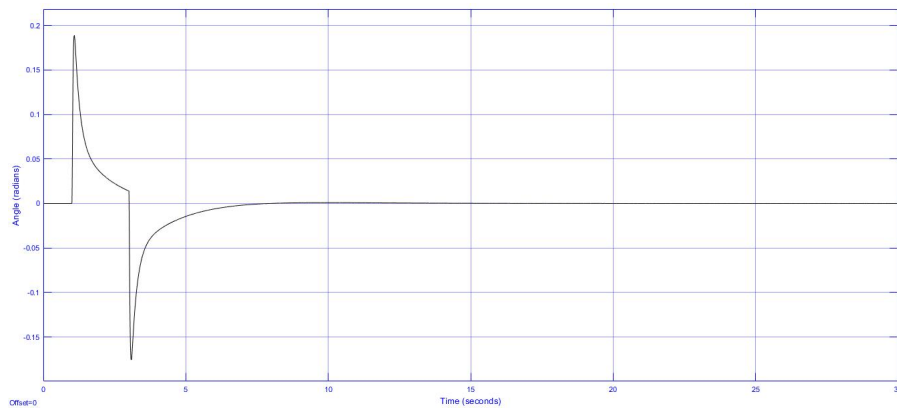


Figura 4.9: Andamento di $\theta_b(t)$ con $k = \frac{1}{2}$

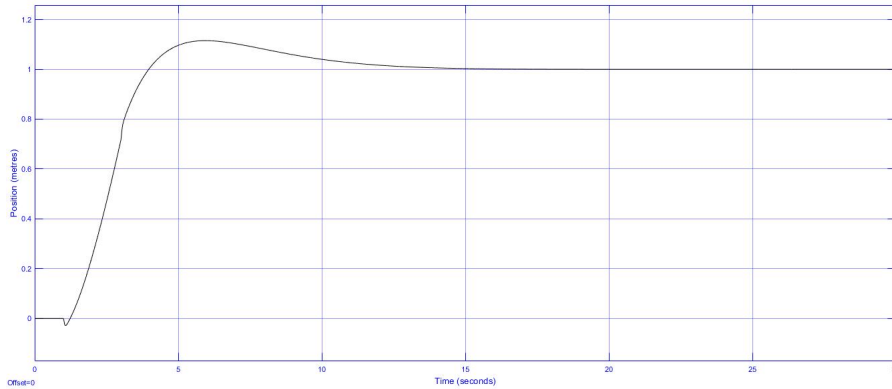


Figura 4.10: Andamento di $x_w(t)$ con $k = \frac{1}{2}$

4.2.1 Simulazioni con condizioni iniziali non nulle

Dopo aver analizzato il comportamento del sistema in presenza di condizioni iniziali nulle, è interessante verificarne l'andamento in presenza di coordinata angolare iniziale θ_{bin} non nulla.

Per inserire una condizione iniziale diversa da zero, è necessario agire nel blocco $\frac{1}{s}$ in Simulink.

Come si nota dalla figura 4.11, anche nel caso di piccoli valori di condizioni iniziali ($\theta_{bin} = 0.05\text{rad} \simeq 2.9^\circ$), l'andamento della tensione dei motori supera il valore massimo tollerato ($15V$) presentando un picco iniziale di $67.5V$.

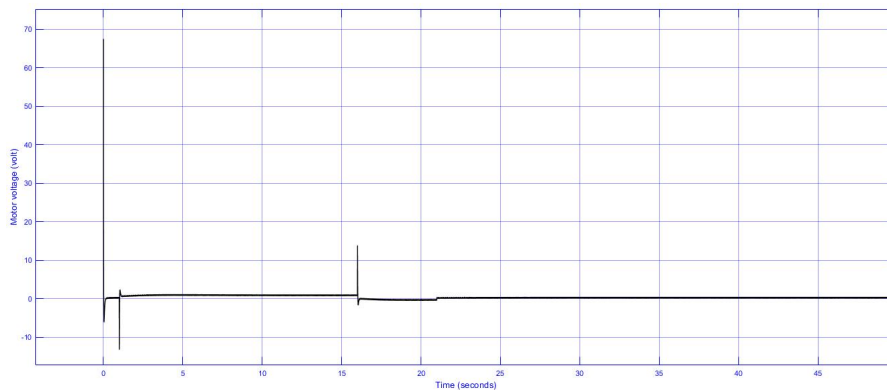


Figura 4.11: Andamento della tensione dei motori con $\theta_{bin} = 0.05$

Per risolvere tale problema è necessario ricorrere al blocco *sat* (introdotto nel capitolo 3) in modo da limitare l'ingresso del sistema in un range $-15/+15$.

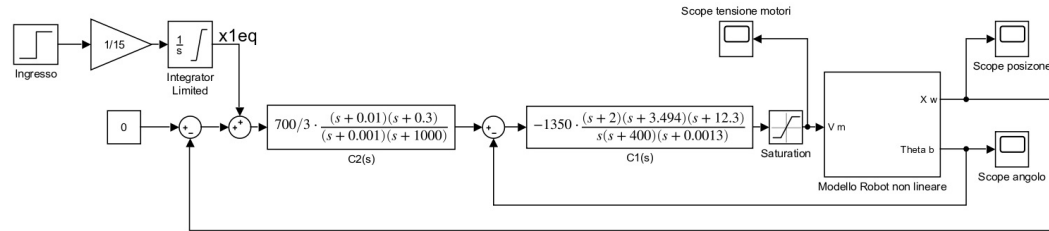


Figura 4.12: Schema a blocchi non lineare con blocco *sat*

In questo modo si ottiene lo schema riportato in figura 4.12.

Considerando $\theta_{bin} = 0.2rad \simeq 11.46^\circ$ il sistema rimane stabile e si ottengono le evoluzioni di $x_w(t)$ e di $\theta_b(t)$ rispettivamente rappresentate nelle figure 4.13 e 4.14.

In questo caso i tempi di salita e di assestamento al 10% corrispondono a $t_s(10\%) = t_r(10\%) = 13.48s$

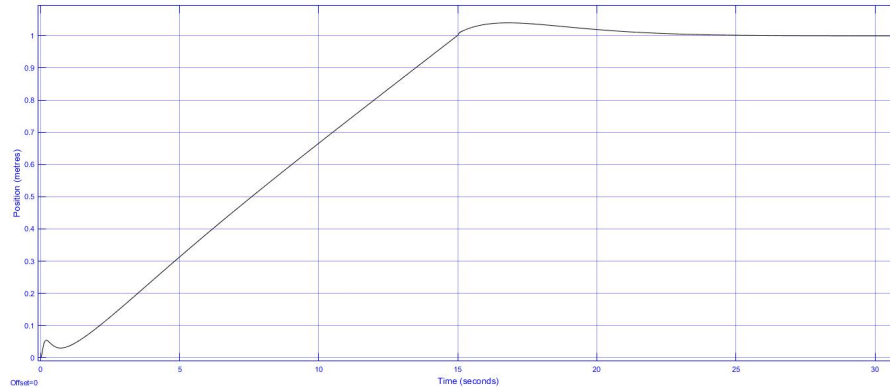
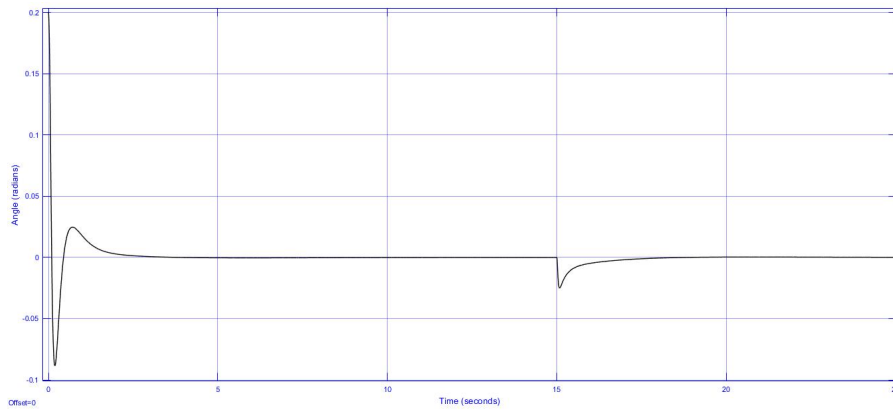
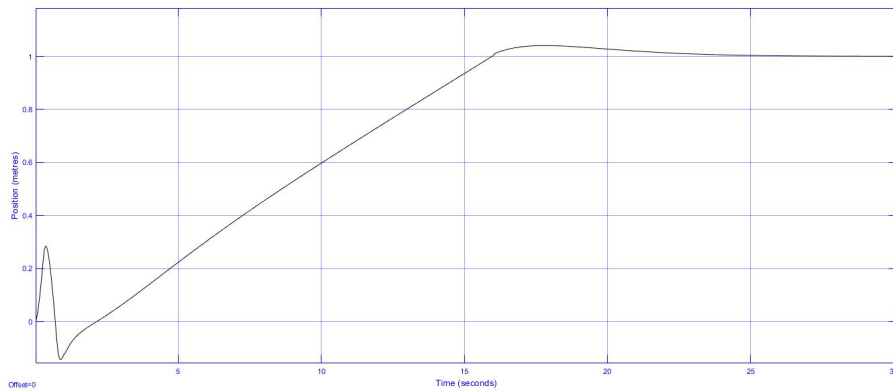
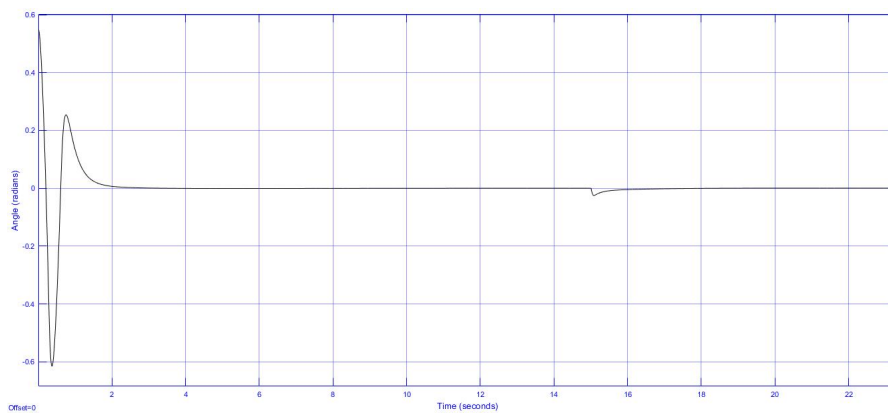


Figura 4.13: Andamento di $x_w(t)$ con $\theta_{bin} = 0.2rad$

Volendo osservare gli andamenti in condizioni maggiormente critiche, si utilizza il valore iniziale della coordinata angolare massimo per cui il sistema resta stabile, cioè $\theta_{bin} = 0.55rad \simeq 31.78^\circ$.

Analizzando l'andamento in figura 4.15 si nota che in questo caso i tempi di salita e di assestamento al 10% corrispondono a $t_s(10\%) = t_r(10\%) = 13.47s$, quindi sono rispettate le specifiche di progetto.

Aumentando il valore di θ_{bin} , il tempo di salita e di assestamento al 10% restano invariati ma aumentano le elongazioni nel transitorio.

Figura 4.14: Andamento di $\theta_b(t)$ con $\theta_{bin} = 0.2rad$ Figura 4.15: Andamento di $x_w(t)$ con $\theta_{bin} = 0.55rad$ Figura 4.16: Andamento di $\theta_b(t)$ con $\theta_{bin} = 0.55rad$

Capitolo 5

Conclusioni

Il progetto di controllo di un robot auto-bilanciato è iniziato con lo studio di un controllore $C_1(s)$, finalizzato a rendere stabile la funzione di trasferimento del sistema retroazionato.

Successivamente si è passati al progetto di un secondo feedback, con controllore $C_2(s)$, allo scopo di far raggiungere al robot una posizione finale prefissata.

Inizialmente il valore di quest'ultima consisteva nell'ampiezza a regime di un gradino ma, per migliorare gli andamenti temporali della posizione e dell'angolo e risolvere la non-tollerabilità della tensione dei motori, anche a costo di un sistema più lento, si è utilizzato un ingresso a trapezio.

Dopo aver osservato che le specifiche nel caso lineare erano state risolte, si è passati all'analisi del non-lineare.

Sapendo che il sistema linearizzato lavora con scostamenti delle variabili dal punto di equilibrio, è stato necessario aggiungere $y_{2eq} = x_{1eq}$ in ingresso al controllore $C_2(s)$ per risolvere il caso non-lineare.

Il punto d'equilibrio considerato è quello relativo allo stato finale del robot. Le analisi fatte nel non-lineare, con condizioni iniziali non nulle, hanno richiesto l'utilizzo di un blocco *sat* in Simulink in modo da limitare, entro un range di tollerabilità, la tensione applicata ai motori.

Il sistema non-lineare risulta stabile con condizioni iniziali dell'angolo θ_{bin} fino a $0.55rad \simeq 31.78^\circ$ e vengono, inoltre, soddisfatte le specifiche di progetto richieste.

Bibliografia

1. M. Bisiacco e M. E. Valcher, Controlli automatici, Edizioni Libreria Progetto Padova, 2008.
2. M. Bisiacco e G. Pillonetto, Sistemi e Modelli, Società editrice Esculapio, 2017.
3. P.Mazzoldi, M. Nigro e C.Voci, Fisica, Vol.1 , Edises, Seconda edizione, 2014.
4. <https://staff.www.ltu.se/damvar/Classes/R7003E-2016-LP2/LabManual.pdf>